

M A T H E M A T I S C H E A N H A E N G E
=====

ANHANG I. BEGRIFFE UND SAETZE AUS DER ANALYSIS

A. Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

In diesem Anhang stellen wir wichtige Begriffe und Sätze der Analysis zusammen, welche in der Vorlesung ständig gebraucht werden. Gleichzeitig fixieren wir auch die verwendeten Notationen. Für Beweise verweise ich auf [1] und [2].

Es sei $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, welche auf einer offenen Umgebung U von \mathbb{R}^m definiert ist. Falls diese in $x \in U$ differenzierbar ist, so bezeichnen wir mit $D\varphi(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ das Differential (die Ableitung) von φ in x . Dieses ist eindeutig definiert durch die Gleichung

$$\varphi(x+v) = \varphi(x) + D\varphi(x) \cdot v + \theta(v) , \quad (1)$$

mit

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\theta(v)}{\|v\|} = 0 .$$

Für Funktionen ($k=1$) f schreiben wir oft auch df statt Df . Das Differential einer Funktion ist ein Element des Dualraumes $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^*$.

Vertrautheit mit der Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen wird vorausgesetzt. [Siehe, wenn nötig, [1], Kap. I, oder [2], Abschnitte 2.3, 2.4] Die wichtigste Rechenregel ist die Kettenregel:

$$D(\psi \circ \varphi)(x) = D\psi(\varphi(x)) \cdot D\varphi(x) . \quad (2)$$

In der Standard-Basis von \mathbb{R}^n wird $D\varphi$ durch die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (3)$$

dargestellt, wenn φ die Komponentendarstellung $\varphi(x_1, \dots, x_m) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_m))$ hat. Insbesondere für eine Funktion f ($k=1$) wird df durch die Zeilenmatrix

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \quad (*)$$

dargestellt.

Ist in \mathbb{R}^m (allgemeiner in einem endlichdimensionalen Vektorraum) ein inneres Produkt (\cdot, \cdot) ausgezeichnet, so ist der Gradient von f definiert durch

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \nabla f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (\nabla f(x), v) &= df(x) \cdot v, \end{aligned} \quad (4)$$

wo $df(x) \cdot v$ die lineare Abbildung $df(x)$ angewandt auf v bezeichnet. In Euklidischen Koordinaten ist

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right); \quad (5)$$

d.h. ∇f ist df "mit Kommas in (*) eingesetzt". Im Matrixkalkül ist ∇f ein Spaltenvektor $\nabla f = (df)^T$ (T: transponiert).

Besonders wichtig ist der

Satz über die Umkehrfunktion: Seien U, V offen in \mathbb{R}^n und sei $\varphi: U \longrightarrow V$ eine C^k -Abbildung. Genau dann ist

φ um $x \in U$ lokal invertierbar, wenn $D\varphi(x)$ regulär ist.
Die lokale Umkehrung ist in diesem Fall auch eine C^k -Abbildung.

[Für Beweise siehe [1], Kap. II, oder [2], Abschnitt 2.5.]

Der nächste Satz ist eine direkte Folge dieses Theorem.

Implizites Funktionen-Theorem: Es sei U offen in \mathbb{R}^n ,
 V offen in \mathbb{R}^k und $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^r -Abbildung,
 $r \geq 1$. Ferner sei $(x_0, y_0) \in U \times V$ und es sei die partielle
Ableitung bezüglich der 2. Variablen, $D_2 f(x_0, y_0): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$,
ein Isomorphismus, d.h.

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right) \neq 0 .$$

Dann existieren offene Umgebungen U_0 von x_0 und W_0 von
 $f(x_0, y_0)$ und eine eindeutige C^r -Abbildung $g: U_0 \times W_0 \rightarrow V$
derart, dass für $(x, w) \in U_0 \times W_0$

$$f(x, g(x, w)) = w .$$

Insbesondere lässt sich die Gleichung $f(x, y) = \text{const.}$
eindeutig auflösen .

* * *

B. Differentialformen

Das Differential df einer Funktion ist eine Abbildung

$$df: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* .$$

Wir betrachten speziell die Funktionen π_i , $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $i=1, \dots, n$. Die $d\pi_i$ bilden eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$, welche zur kanonischen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von \mathbb{R}^n dual ist, d.h. es gilt

$$d\pi_i(e_j) = \delta_{ij} . \quad (6)$$

Die Grösse $df(x) \cdot v$ ist die Richtungsableitung von f in Richtung v und es gilt, wenn $v = \sum v_i e_i$,

$$df(x) \cdot v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\pi_i(v) .$$

Deshalb ist

$$df(x) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) d\pi_i(x) .$$

Statt $d\pi_i$ schreibt man auch etwas inkonsequent dx_i und erhält damit den Anschluss an die klassische Schreibweise:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i . \quad (7)$$

(Man beachte, dass die dx_i aber nicht "infinitesimale" Grössen sind, sondern wohldefinierte Linearformen.)

Die Zuordnung $x \longmapsto df(x)$ definiert eine spezielle Differentialform.

Definition: Eine in U definierte lineare Differentialform (1-Form) ist eine Abbildung

$$\omega: U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* . \quad (8)$$

Diese heisst von der Klasse C^k , wenn die Abbildung (8) von der Klasse C^k ($k \geq 0$) ist.

Das Produkt einer Funktion f mit einer 1-Form ω ist punktweise erklärt,

$$(f\omega)(x) = f(x)\omega(x),$$

und gibt wieder eine 1-Form.

Eine 1-Form ω können wir nach der Basis dx_i zerlegen,

$$\omega = \sum_i \omega_i dx_i. \quad (9)$$

Ist ω von der Klasse C^k , so sind die ω_i Funktionen der Klasse C^k .

Wir nennen ω exakt, falls eine Funktion existiert, so dass $\omega = df$ ist. Falls U zusammenhängend ist, ist f bis auf eine Konstante eindeutig. Notwendig für die Exaktheit von ω ist offensichtlich die Bedingung

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = 0. \quad (10)$$

Falls ω die Gl. (10) erfüllt, nennen wir die Differentialform geschlossen. Es gilt der

Satz: Wenn U einfach zusammenhängend ist, dann ist jede geschlossene 1-Form (mit Bereich U) in U exakt.

In der Mechanik müssen wir Differentialformen häufig auf neue Koordinaten transformieren. Wir betrachten hier etwas allgemeiner eine differenzierbare Abbildung $\varphi: M \rightarrow N$ von einem offenen Gebiet $M \subset \mathbb{R}^m$ nach $N \subset \mathbb{R}^n$. Auf einem offenen Gebiet $U \supset N$ sei eine 1-Form ω definiert (vgl.

Fig.) Diese Form können wir wie folgt auf

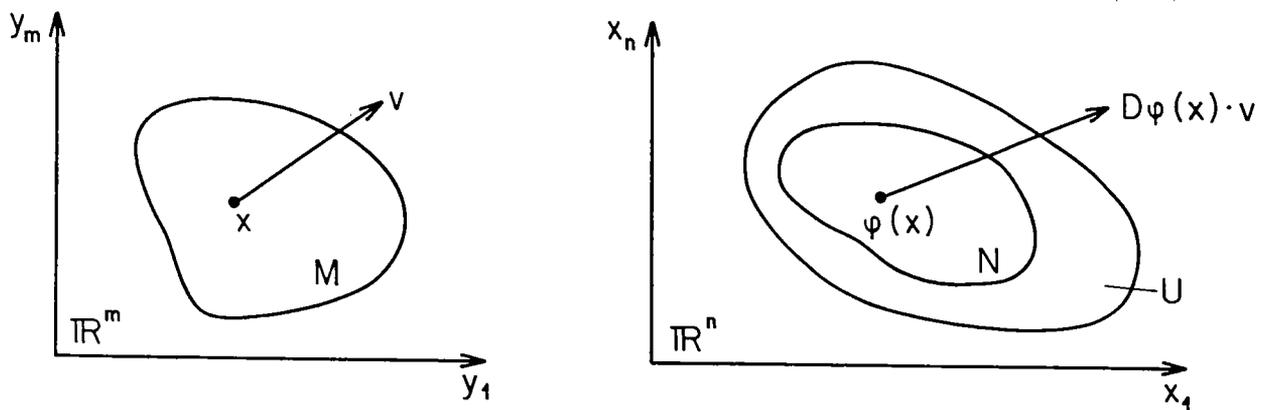


Fig.

M zurückziehen:

$$(\varphi^*\omega)(x) \cdot v = \omega(\varphi(x)) \cdot D\varphi(x)v \quad (11)$$

Offensichtlich ist die induzierte Abbildung $\omega \mapsto \varphi^*\omega$ additiv,

$$\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2 \quad (12)$$

Nach der Kettenregel (2) gilt ferner

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* \quad (13)$$

Für $\omega = df$ ist

$$\varphi^*(df)(x) \cdot v = df \cdot D\varphi(x)v = d(f \circ \varphi)(x) \cdot v ,$$

d.h.

$$\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^*f) \quad (14)$$

wenn wir für die transformierte Funktion $f \circ \varphi$ auch φ^*f schreiben.

Aus der Definition (11) entnimmt man sofort, dass für das Produkt $f\omega$ einer Funktion f und einer 1-Form ω folgendes gilt

$$\varphi^*(f\omega) = \varphi^*(f) \varphi^*(\omega) . \quad (15)$$

Aus den Gl. (12), (14) und (15) ergibt sich

$$\varphi^*\omega = \varphi^*\left(\sum_i \omega_i dx_i\right) = \sum_i \varphi^*(\omega_i) \varphi^*(dx_i) = \sum_i \varphi^*(\omega_i) d(\varphi^*x_i) ,$$

oder

$$\varphi^*\omega = \sum_i (\omega_i \circ \varphi) d(x_i \circ \varphi) . \quad (16)$$

Schreiben wir also die Abbildung φ in der Form

$$x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_m) , \quad i=1, \dots, n , \quad (17)$$

so gilt

$$\begin{aligned} (\varphi^*\omega)(y) &= \sum_i \omega_i(\varphi(y)) d\varphi_i(y) \\ &= \sum_{i,j} [\omega_i(\varphi(y)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y)] dy_j . \end{aligned} \quad (18)$$

Setzen wir also

$$\varphi^*\omega = \sum_j (\varphi^*\omega)_j dy_j ,$$

so gilt für die Komponenten von $\varphi^*\omega$ das Transformationsgesetz

$$(\varphi^*\omega)_j(y) = \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y) \omega_i(\varphi(y)) . \quad (19)$$

In der Praxis benutzt man als Ausgangspunkt meistens die erste Zeile von (18) und rechnet von dort an mechanisch weiter.

* * *

Gelegentlich benutzen wir auch Differentialformen höherer Stufe. Dies ist für das Verständnis der Vorlesung aber nicht wesentlich. Hier ein kurzes Résumé (siehe [2], Kapitel XVI).

Mit $\Lambda_p(E)$ bezeichnen wir den Vektorraum der alternierenden Multilinearformen vom Grad p über E . Das äussere Produkt (Dachprodukt) von $\alpha \in \Lambda_p(E)$ und $\beta \in \Lambda_q(E)$ ist definiert durch

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta), \quad (20)$$

wo \mathcal{A} der Alternierungsoperator ist und

$$\alpha \otimes \beta(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) = \alpha(v_1, \dots, v_p) \beta(w_1, \dots, w_q). \quad (21)$$

Das äussere Produkt ist

- (i) bilinear;
- (ii) (graduiert) antikommutativ, d.h. es gilt
$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \in \Lambda_p(E), \beta \in \Lambda_q(E);$$
- (iii) assoziativ;
- (iv) natürlich, d.h. für eine lineare Abbildung

$$\varphi: E \longrightarrow F \quad \text{gilt } *)$$

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^* \alpha \wedge \varphi^* \beta.$$

Ist θ_i ($i=1, \dots, n$) eine Basis von $E^* = L(E, \mathbb{R})$, so bilden die Elemente $\theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_p}$, $0 < i_1 < \dots < i_p \leq n$, eine Basis von $\Lambda_p(E)$, also ist $\dim \Lambda_p(E) = \binom{n}{p}$.

Nun sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Eine Differentialform vom Grade p (p -Form) ist eine Abbildung

$$\omega: U \longrightarrow \Lambda_p(\mathbb{R}^n).$$

*) Dabei ist

$$(\varphi^* \alpha)(v_1, \dots, v_p) = \alpha(\varphi v_1, \dots, \varphi v_p).$$

Ist diese Abbildung von der Klasse C^k , so sagen wir, die Form sei von der Klasse C^k .

Da die dx_i eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$ bilden, haben wir eine Darstellung der Form

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad (22)$$

Das äussere Produkt $\alpha \wedge \beta$ von zwei Differentialformen α und β ist punktweise erklärt

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x) .$$

Der Operator d , welcher Funktionen in 1-Formen überführt, lässt sich verallgemeinern. Wir definieren die äussere Ableitung zunächst für eine Darstellung (22) und geben sodann eine Charakterisierung, welche koordinatenunabhängig ist. Das äussere Differential $d\omega$ der p -Form (22) ist die $(p+1)$ -Form

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} . \quad (23)$$

Es gilt der wichtige

Satz: Es gibt genau eine Abbildung d von der Menge der p -Formen in die Menge der $(p+1)$ -Formen mit folgenden Eigenschaften:

- (i) d ist \mathbb{R} -linear .
- (ii) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, α : p -Form .
- (iii) Für Funktionen f ist df das Differential von f .
- (iv) $d \circ d = 0$.

Für die äussere Ableitung gilt darüber hinaus:

(v) Ist φ eine differenzierbare Abbildung, so gilt *)

für jede p -Form α

$$\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^* \alpha) .$$

(vi) In einer Koordinatendarstellung (22) ist d durch (23) gegeben.

Eine Form ω ist geschlossen, wenn $d\omega = 0$, und exakt, wenn $\omega = d\psi$ für eine Form ψ . Es gilt der

Satz (Lemma von Poincaré): Ist U eine offene sternförmige Menge von \mathbb{R}^n , dann ist jede auf U geschlossene Form auch exakt: aus $d\omega = 0$ folgt $\omega = d\psi$.

* * *

) Die zurückgezogene Form φ^α ist wie in (11) gegeben durch

$$(\varphi^*\alpha)(v_1, \dots, v_p) = \alpha(D\varphi \cdot v_1, \dots, D\varphi \cdot v_p) .$$

ANHANG II. LINEARE LIESCHE GRUPPEN

In diesem Anhang stellen wir die gruppentheoretischen Hilfsmittel zusammen, die (speziell in § 8.3) benötigt werden. Um den elementaren Rahmen dieser Vorlesung nicht zu sprengen, beschränken wir uns auf lineare Liesche Gruppen. "Nur" diese spielen in der Physik eine Rolle. Eine lineare Gruppe ist definitionsgemäss eine Untergruppe der vollen linearen Gruppe. Deshalb beginne ich mit ein paar Bemerkungen zu dieser Gruppe.

1. Die volle lineare Gruppe $GL(n, K)$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Die Menge aller $n \times n$ Matrizen über \mathbb{R} können wir mit den Punkten in \mathbb{R}^{n^2} identifizieren. Da die Determinante eine stetige Funktion ist, ist die Gruppe

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det A \neq 0 \}$$

eine offene Menge in \mathbb{R}^{n^2} und damit in natürlicher Weise ein topologischer Raum. Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ ist bezüglich dieser Topologie eine topologische Gruppe, d.h. die Gruppenoperationen sind stetig.

Wir wollen schon hier festhalten, dass $GL(n, \mathbb{R})$ eine wesentlich "stärkere" Struktur hat. Die Gruppenoperationen sind nämlich C^∞ , ja sogar analytisch. Dies bedeutet, dass die Abbildungen $(A, B) \mapsto AB$ und $A \mapsto A^{-1}$, $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, differenzierbar (analytisch) sind. [Was dies bedeutet ist klar, da es sich um Abbildungen von offenen

Teilmengen eines \mathbb{R}^m in einen \mathbb{R}^n handelt]. Nach der weiter unten zu gebenden Definition ist $GL(n, \mathbb{R})$ eine lineare Liesche Gruppe.

Ebenso betrachten wir $GL(n, \mathbb{C})$ als eine offene Teilmenge in \mathbb{R}^{2n^2} , indem wir jedem $A = (a_{ik})$ den Punkt $(\operatorname{Re} a_{ik}, \operatorname{Im} a_{ik})$, (ik) in bestimmter Reihenfolge, zuordnen. Die analogen Aussagen wie für $GL(n, \mathbb{R})$ gelten auch für $GL(n, \mathbb{C})$.

2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n

Um den Begriff einer linearen Lieschen Gruppe formulieren zu können, benötigen wir den Begriff einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n . Ich erinnere zunächst an die

Def.: Seien U, V offene Mengen eines \mathbb{R}^n und $\varphi: U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung, welche ein differenzierbares Inverses φ^{-1} hat, dann nennt man φ einen Diffeomorphismus.

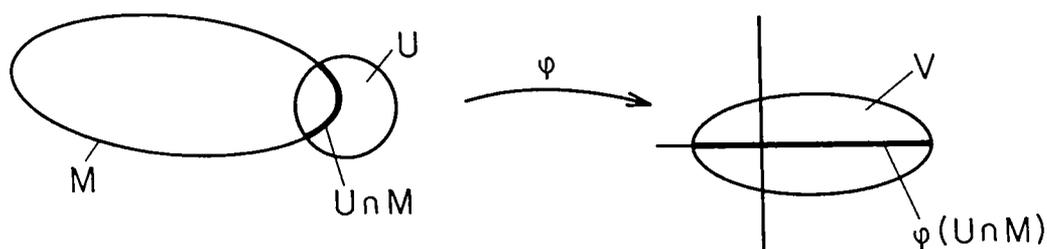
Eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n kann man auf verschiedene äquivalente Weisen definieren. Wir wählen folgende

Def.: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (in \mathbb{R}^n), falls für jeden Punkt $x \in M$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

(M) Es existiere eine offene Menge U welche x enthält und ein Diffeomorphismus $\varphi: U \longrightarrow V$, so dass

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap M) &= V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \\ &= \{ x \in V: x_{k+1} = \dots = x_n = 0 \}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: $U \cap M$ ist "bis auf einen Diffeomorphismus" gleich $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ (siehe die Fig.).



Viele Beispiele von (diffb.) Mannigfaltigkeiten werden durch den unten folgenden Satz 1 geliefert. Um ihn zu beweisen, benötigen wir den folgenden

Hilfssatz: Sei U eine offene Umgebung von $a \in \mathbb{R}^{n+p}$ und g eine C^r -Abbildung ($1 \leq r \leq \infty$) von U nach \mathbb{R}^n und sei $g(a) = 0$. Ferner sei $\text{Rang}(Dg(a)) = n$. Dann existiert ein C^r -Diffeomorphismus ψ von einer Umgebung von 0 in \mathbb{R}^{n+p} auf eine Umgebung V von a , so dass für alle Punkte $x \in V$ folgendes gilt

$$(g \circ \psi)(x^1, \dots, x^{n+p}) = (x^1, \dots, x^n)$$

Mit anderen Worten gilt auf V :

$$g \circ \psi = \pi_1, \quad \pi_1 = \text{Projektion von } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Sei $g = (g_1, \dots, g_n)$. Wir nehmen an, dass etwa

$$\text{Det} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0.$$

Ansonsten müsste man die x_j zuerst noch geeignet permutieren. Sei $G: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ definiert durch

$$G(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x), x_{n+1}, \dots, x_{n+p}),$$
 dann ist

$\text{Det} (DG(a)) \neq 0$, $G(a) = 0$. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung existiert deshalb ein Diffeomorphismus ψ von einer Umgebung V von 0 in \mathbb{R}^{n+p} mit $G \circ \psi = \text{Id}|_V$. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} G(\psi(x)) &= (g_1(\psi(x)), \dots, g_n(\psi(x)), \psi_{n+1}(x), \dots, \psi_{n+p}(x)) \\ &= (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}). \end{aligned}$$

Also gilt für $x \in V$: $g_i(\psi(x)) = x_i$, $i=1, \dots, n$. \square

Satz 1: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine diffb. Abbildung mit der Eigenschaft, dass $Dg(x)$ den Rang p hat, wenn immer $g(x) = 0$. Dann ist $g^{-1}(0)$ eine $(n-p)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n .

Beweis: Wir haben zu zeigen: Zu $a \in g^{-1}(0)$ existiert eine offene Menge $U \ni a$ und eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, sowie ein Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$, so dass

$$\varphi(U \cap g^{-1}(0)) = V \cap (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}).$$

Nach dem Hilfssatz existiert ein Diffeomorphismus $\psi: V \rightarrow U$ von einer Umgebung V von 0 in \mathbb{R}^n auf eine Umgebung U von a in \mathbb{R}^n , so dass das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{array}{ccc}
 a \in U \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \\
 \psi \uparrow & \nearrow \pi & \\
 0 \in V \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} & & (g(a) = 0) .
 \end{array}$$

Sei $\varphi = \psi^{-1}$, dann folgt daraus sofort

$$\varphi(U \cap g^{-1}(0)) = V \cap \text{Ker } \pi_1 = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}). \quad \square$$

Anwendung. Aus dem bewiesenen Satz folgt unmittelbar, dass z.B. die n -Sphäre S^n eine Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{n+1} ist, denn $S^n = g^{-1}(0)$ für $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = \|x\| - 1$. Andere Anwendungen folgen weiter unten.

Eine sehr wichtige alternative Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit wird durch den folgenden Satz gegeben.

Satz 2: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k -dim. Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n genau dann, wenn für jeden Punkt $x \in M$ die folgende "Koordinatenbedingung" erfüllt ist:

- (K) Es existiert eine offene Umgebung U von x in \mathbb{R}^n und eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^k$, sowie eine differenzierbare injektive Abbildung $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass
- (i) $f(W) = M \cap U$
 - (ii) $\text{Rang } (Df(y)) = k$ für alle $y \in W$.

Eine solche Funktion f nennt man eine Parametrisierung.

Beweis: Sei M eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n , dann wähle man einen Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$, welcher (M) erfüllt. Sei

$$W = \{ a \in \mathbb{R}^k : (a, 0) \in \varphi(M) \}$$

und $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch $f(a) = \varphi^{-1}(a, 0)$.

Dann ist natürlich $f(W) = M \cap U$ (benutze (M)). Wir zeigen, dass der Rang von Df gleich k ist. Dazu sei

$$\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^k : \phi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_k(z)).$$

Dann gilt für alle $y \in W$: $\phi(f(y)) = y$, also

$$D\phi(f(y)) \cdot Df(y) = \text{Id}.$$

Damit erfüllt f die Bedingung (K).

Erfüllt umgekehrt $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Bedingung (K), dann ist nach einer eventuellen Permutation die Matrix

$(\partial f_i / \partial x_j)$, $i, j = 1, \dots, k$, nichtsingulär. Wir definieren

$$g: W \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ durch}$$

$$g(a, b) = f(a) + (0, b).$$

Es gilt

$$Dg = \left(\begin{array}{c|c} Df & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right).$$

Also $\text{Det}(Dg) \neq 0$. Nach dem inversen Funktionen-Theorem existiert eine offene Menge V_1 , welche $(x, 0)$ enthält und eine offene Menge V_2 , welche $g(x, 0) = f(x)$ enthält, so dass $g: V_1 \rightarrow V_2$ ein differenzierbares Inverses $\varphi: V_2 \rightarrow V_1$ hat. Dann ist (beachte (i) von (K))

$$\begin{aligned} \varphi(V_2 \cap M) &= g^{-1}(V_2 \cap M) = g^{-1}(\{g(x, 0) : (x, 0) \in V_1\}) \\ &= V_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung

Aus dem Beweis von Satz 2 entnimmt man die folgende wichtige

Tatsache: Sind $f_1: W_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$

und $f_2: W_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Parametrisierungen, dann ist $f_2^{-1} \circ f_1$ auf dem Definitionsbereich differenzierbar und $\text{Det}(D(f_2^{-1} \circ f_1)) \neq 0$. In der Tat, sei φ die im Beweis von Satz 2 konstruierte differenzierbare Abbildung zu f_2 , dann ist

$$f_2^{-1} \circ f_1 = (\pi_1 \circ \varphi) \circ f_1,$$

wo π_1 die Projektion auf die ersten k Komponenten ist. Die rechte Seite ist natürlich differenzierbar. Dasselbe gilt selbstverständlich für die inverse Abbildung $f_1^{-1} \circ f_2$ und damit ist $D(f_2^{-1} \circ f_1)$ nicht singulär.

Def. Eine Abbildung $\varphi: M \longrightarrow N$, $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ diffb. Mannigf., ist differenzierbar in $x \in M$, falls für ein Koordinatensystem f (Parametrisierung) $\varphi \circ f: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ($k = \dim M$) differenzierbar ist. Ist speziell $N = \mathbb{R}^m$, so ist φ eine differenzierbare Funktion auf M .

Nach der obigen Bemerkung ist klar, dass diese Definition nicht vom Koordinatensystem abhängt. Ausserdem zeigt man gleich wie dort, dass für eine Parametrisierung g von N um $\varphi(x)$ die Funktion $g^{-1} \circ \varphi \circ f: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ ($l = \dim N$) differenzierbar ist.

3. Tangentialraum, Tangentialabbildung

Sei M eine k -dim. Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n und sei $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von M um $x = f(a)$. Da der Rang von $Df(a)$ gleich k ist, ist die lineare Transformation $Df(a): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und $Df(a) \cdot \mathbb{R}^k$ ist damit ein k -dim. Unterraum von \mathbb{R}^n . Falls $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine andere Parametrisierung um $x = g(b)$ ist, dann gilt

$$Dg(b) \cdot \mathbb{R}^k = Df(a) \circ D(f^{-1} \circ g)(b) \cdot \mathbb{R}^k = Df(a) \cdot \mathbb{R}^k.$$

Der k -dim. Unterraum $Df(a) \cdot \mathbb{R}^k$ hängt also nicht von der Parametrisierung ab. Diesen Unterraum bezeichnen wir mit $T_x(M)$ und nennen ihn den Tangentialraum von M im Punkte x . [Tangentialräume in verschiedenen Punkten soll man als verschieden ansehen].

Es ist leicht einzusehen, dass

$$T_x(M) = \left\{ \dot{\gamma}(0) : \gamma(s) = \text{Kurve in } M \text{ mit } \gamma(0) = x \right\}.$$

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ zwei differenz. Mannigf. und $\varphi: M \rightarrow N$ eine diffb. Abbildung. Für jedes $x \in M$ induziert φ eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen $T_x(M)$ und $T_{\varphi(x)}(N)$ in folgender Weise: Sei $\gamma(t)$ eine Kurve durch $x \in M$ mit $\gamma(0) = x$ und dem Tangentialvektor $v = \dot{\gamma}(0) \in T_x(M)$, dann ist $t \mapsto (\varphi \circ \gamma)(t)$ eine Kurve in N durch $\varphi(x)$.

Den zugehörigen Tangentialvektor bei $t = 0$ bezeichnen wir mit $v' = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma) \right|_{t=0}$. Die Abbildung $v \mapsto v'$ bezeichnen wir mit $T_x(\varphi): T_x(M) \rightarrow T_{\varphi(x)}(N)$. Führt man um x und $\varphi(x)$ Parametrisierungen f und g ein, so ist die Ab-

bildung für die Repräsentanten ξ und ξ' von v und v' gegeben durch

$$\xi' = D(g^{-1} \circ \varphi \circ f) \cdot \xi .$$

Deshalb ist $T_x(\varphi)$ eine lineare Abbildung, die sogenannte Tangentialabbildung im Punkte x .

4. Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

Ein Vektorfeld X ist eine Abbildung, welche jedem $x \in M$ (M diffb. Mannigf.) einen Vektor $X(x)$ in $T_x(M)$ zuordnet. Für eine Parametrisierung $f: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es zu X ein eindeutiges Vektorfeld ξ auf W , derart, dass $Df(a) \cdot \xi(a) = X(f(a))$ für jedes $a \in W$. Wir sagen X sei differenzierbar, falls ξ differenzierbar ist. Diese Definition hängt wieder nicht von der Parametrisierung ab. ξ nennen wir den Repräsentanten von X in der Parametrisierung f . Sei $\varphi: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus von zwei Mannigfaltigkeiten M und N (d.h. φ habe ein diffb. Inverses). Ferner sei X ein Vektorfeld auf M . Dann definieren wir ein Vektorfeld $\varphi_* X$ auf N durch

$$(\varphi_* X)(\varphi(x)) = T_x(\varphi) \cdot X(x) .$$

Mit X ist auch $\varphi_* X$ differenzierbar.

5. Lineare Liesche Gruppen

Nun können wir den Begriff der linearen Lieschen Gruppe präzise definieren.

Def. Eine Teilmenge $G \subset GL(n, K)$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ist eine lineare Liesche Gruppe, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) G ist eine (abstrakte) Untergruppe von $GL(n, K)$
- (ii) G ist eine diffb. Mannigf. in \mathbb{R}^{n^2} bzw. \mathbb{R}^{2n^2} .

Insbesondere ist natürlich $GL(n, K)$ eine lineare Liesche Gruppe.

Die Gruppenoperationen sind differenzierbar, womit gemeint ist, dass die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \longrightarrow & G \\
 ((x, y) & \longmapsto & x \cdot y
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 G & \longrightarrow & G \\
 (x & \longmapsto & x^{-1})
 \end{array}$$

differenzierbar sind. Dies sieht man so: Für Parametrisierungen f und g von G sind

$$\mu \circ (fxg): (x, y) \longmapsto f(x) \cdot g(y)$$

und $\text{Dof}: x \longmapsto f(x)^{-1}$

differenzierbar, weil die Gruppenoperationen in $GL(n, K)$ differenzierbar sind.

Beispiele:

1) Die spezielle lineare Gruppe: $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$

Sei $g(A) = \det(A) - 1$. Dann ist $SL(n, \mathbb{R}) = g^{-1}(0)$. Nun ist

$$Dg(A) = \left(\frac{\partial \det A}{\partial a_{ik}} \right) = (A_{ik}).$$

Hier ist $A = (a_{ik})$ und A_{ik} ist der Minor von a_{ik} . Also ist $Dg(A) \neq 0$ für $g(A) = 0$. Nach Satz 1 folgt deshalb, dass $SL(n, \mathbb{R})$ eine lineare Liesche Gruppe ist.

2) In ähnlicher Weise zeigt man, dass die orthogonalen Gruppen $O(n)$ und $SO(n)$ lineare Liesche Gruppen sind. Dies folgt auch aus folgendem Theorem, welches wir aber nicht beweisen:

Satz 3: (E. Cartan)

Jede abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, K)$ ist eine lineare Liesche Gruppe.

Aus diesem Satz folgt, dass auch die unitären Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$, sowie die symplektischen Gruppen $Sp(n)$ lineare Liesche Gruppen sind.

6. Die Liealgebra einer linearen Lieschen Gruppe

Es sei G eine lineare Liesche Gruppe und \mathfrak{g} sei der Tangentialraum $T_e(G)$, $e =$ Einselement von G . Es gilt der

Satz 4: Mit dem Multiplikationsgesetz

$$[X, Y] := X \cdot Y - Y \cdot X, \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

wobei der Punkt die Matrixmultiplikation bezeichnet, ist

\mathfrak{g} eine Liesche Algebra von linearen Transformationen.

Beweis: \mathcal{G} ist nach Definition ein Vektorraum. Das definierte Klammerprodukt ist offensichtlich bilinear, schief und erfüllt die Jacobi Identität. Es bleibt zu zeigen, dass mit $X, Y \in \mathcal{G}$ auch $[X, Y]$ in \mathcal{G} enthalten ist. Nun sei

$$X = \left. \frac{dA(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}, \quad A(\tau): \text{ Kurve in } G \text{ mit } A(0) = \mathbb{1},$$

$$Y = \left. \frac{dB(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0}, \quad B(\tau): \text{ " " " " } B(0) = \mathbb{1}.$$

Sei weiter

$$C(s) := A(\sqrt{s}) B(\sqrt{s}) A^{-1}(\sqrt{s}) B^{-1}(\sqrt{s}).$$

Dies ist wieder eine Kurve in G mit $C(0) = \mathbb{1}$.

Jetzt bilden wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} C(s) \right|_{s=0} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C(s) - \mathbb{1}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{ [A(\sqrt{s}), B(\sqrt{s})] A^{-1}(\sqrt{s}) B^{-1}(\sqrt{s}) \} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{A(\sqrt{s}) - \mathbb{1}}{\sqrt{s}}, \frac{B(\sqrt{s}) - \mathbb{1}}{\sqrt{s}} \right] A^{-1}(\sqrt{s}) B^{-1}(\sqrt{s}) \right\} = [X, Y]. \quad \square \end{aligned}$$

Wir bestimmen jetzt die Lieschen Algebren einiger linearer Liescher Gruppen.

1) $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$:

Die zugehörigen Liealgebren bestehen aus allen reellen bzw. komplexen $n \times n$ Matrizen $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, bzw. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Tatsächlich ist für jedes $X \in \mathfrak{gl}(n, K)$ die Kurve $A(s) = \exp(sX)$ in $GL(n, K)$ mit $A(0) = \mathbb{1}$ und $dA(s)/ds|_{s=0} = X$.

2) Die spezielle lineare Gruppe $SL(n, K)$

Sei $A(s)$ eine Kurve in $SL(n, K)$ mit $X = \left. \frac{d(A(s))}{ds} \right|_{s=0}$

und $A(0) = \mathbb{1}$. Dann gilt [A_{ij} seien die Minoren zu A]

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{ds} \text{Det } A(s) \right|_{s=0} = \sum \frac{\partial}{\partial a_{ij}} (\text{Det } A) \left. \frac{d a_{ij}(0)}{ds} \right|_{s=0} \\ &= \sum A_{ij}(0) \dot{a}_{ij}(0) = \sum \delta_{ij} \dot{a}_{ij}(0) = \text{Sp } X . \end{aligned}$$

Also ist notwendigerweise $\text{Sp } X = 0$. Diese Bedingung ist

aber auch hinreichend, denn $\exp(sX) \in GL(n, K)$ und

$\text{Det}(\exp(sX)) = \exp(s \cdot \text{Sp } X) = 1$; also ist $\exp(sX) \in SL(n, K)$

mit X als Tangentialvektor bei $\mathbb{1}$. Die Liealgebra $\mathfrak{sl}(n, K)$

von $SL(n, K)$ ist demnach

$$\mathfrak{sl}(n, K) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, K) : \text{Sp } X = 0 \right\} .$$

3) Die unitäre Gruppe $U(n)$

Sei $A(s)$ wieder eine einparametrische Kurve mit X als Tan-

gentialvektor bei der Gruppeneins: $A(s)A(s)^* = \mathbb{1}$. Daraus

folgt $X + X^* = 0$, also ist X notwendigerweise schief-

hermitesch. Umgekehrt habe X diese Eigenschaft. Dann gilt

$$\exp(sX)(\exp sX)^* = \exp sX \exp sX^* = \exp sX \exp -sX = \mathbb{1} .$$

Die Liealgebra ist demnach

$$\mathfrak{u}(n) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X + X^* = 0 \right\} .$$

4) Die spezielle unitäre Gruppe SU(n)

Die Liealgebra für diese Gruppe ist natürlich

$$\mathfrak{su}(n) = \{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X + X^* = 0, \operatorname{Sp} X = 0 \}.$$

Übungsaufgabe: Bestimme die Liealgebren der orthogonalen und symplektischen Gruppen.

7. Die Exponential-Darstellung

Im folgenden sei G eine lineare Liesche Gruppe, f eine Parametrisierung von G um das Einselement mit $f(0) = \mathbb{1} \equiv e$, und \mathfrak{g} sei die Liealgebra zu G .

Wir beginnen mit einer Vorbemerkung: Der Tangentialraum $T_{a_0}(G)$ bei $a_0 \in G$ ist $a_0 \cdot \mathfrak{g}$. Dies sieht man so: Eine Kurve $a(t)$ durch a_0 ($a(0) = a_0$) geht durch Linksmultiplikation mit a_0^{-1} in eine Kurve $b(t) = a_0^{-1}a(t)$ durch e über mit $b(0) = e$. Der Tangentialraum $T_{a_0}(G)$ besteht aus der Menge der Vektoren

$$\left. \frac{d}{dt} a(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (a_0 \cdot b(t)) \right|_{t=0} = a_0 \left. \frac{d}{dt} b(t) \right|_{t=0} \in a_0 \cdot \mathfrak{g}.$$

Wir stellen nun die Frage: Wie konstruiert man G aus \mathfrak{g} ? Die bisherigen Beispiele legen es nahe, dass dies durch die Exponentialabbildung geschehen könnte. Tatsächlich werden wir zeigen, dass jedenfalls lokal G und $\exp \mathfrak{g}$ "übereinstimmen".

Satz 5: Aus $X \in \mathfrak{g}$ folgt $\exp(tX) \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Kurve $A(t) := \exp(tX)$ ist durch die Differentialgleichung

$$\dot{A}(t) = A(t) X$$

mit der Anfangsbedingung $A(0) = \mathbb{1}$ charakterisiert. Falls gezeigt werden kann, dass die Gleichung für kleine t in G gelöst werden kann, dann impliziert die Eindeutigkeit der Lösung, dass für kleine t $\exp(tX)$ in G ist. Wegen des Gruppencharakters von G ist dann aber $\exp(tX) \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Nun zeigen wir, dass für kleine t eine Lösung in G existiert. Da $AX \in T_A(G)$, $A \in G$, definiert die Zuordnung $A \mapsto AX$ ein Vektorfeld auf G . Für dieses existiert eine Integralkurve $B(t) \in G$ durch $\mathbb{1} : \dot{B}(t) = B(t) X$ für genügend kleine t und $B(0) = \mathbb{1}$. Die Existenz (und Eindeutigkeit) dieser Integralkurve in der Nähe von $\mathbb{1}$ sieht man so: Man wähle eine Parametrisierung f in der Umgebung der Gruppen-eins und schreibe die Differentialgleichung im Parameterraum. Dort erhalten wir eine Differentialgleichung der Art wie sie in § 2.1 studiert wurden. Wir wissen, dass diese für kleine t eine (eindeutige) Lösung hat. \square

Die bewiesene Aussage (Satz 5) bedeutet $\exp \mathfrak{g} \subset G$. Nun ist $\text{Rang}(D \exp_0) = \dim \mathfrak{g} = \dim G$. Deshalb ist die Abbildung \exp ein Diffeomorphismus von einer Umgebung V von Null in \mathfrak{g} auf eine Umgebung U von $\mathbb{1}$ in G . Dieses Resultat wollen wir als Satz festhalten.

Satz 6: Die Exponentialabbildung \exp bildet die Liealgebra \mathfrak{g} einer linearen Lieschen Gruppe G in die Gruppe G ab. Lokal vermittelt \exp einen Diffeomorphismus zwischen einer Umgebung V von 0 in \mathfrak{g} und einer Umgebung U von 1 in G . \exp ist also eine Parametrisierung $^*)$ von G um 1 .

Die Parametrisierung \exp ist analytisch. Durch Linkstranslation erhalten wir für jeden Punkt von G eine analytische Parametrisierung. Daraus folgt der

Satz 7: Jede lineare Liesche Gruppe ist eine analytische lineare Gruppe.

Eine einparametrische Untergruppe $A(s) : A(s_1) A(s_2) = A(s_1+s_2)$, ist von der Form $A(s) = \exp(sX)$, $X \in \mathfrak{g}$, denn dies ist die eindeutige Lösung der Funktionalgleichung für $A(s)$. Umgekehrt ist jedes $A(s)$ von dieser Form eine einparametrische Untergruppe. Lokal überdecken diese die Gruppe G . In den kanonischen Koordinaten 1. Art entspricht einer 1-parametrischen Untergruppe eine Gerade $s \longmapsto (sa_1, \dots, sa_k)$.

*)

Führen wir durch X_1, \dots, X_k eine Basis in \mathfrak{g} ein, so ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow G$, definiert durch $f(x_1, \dots, x_k) = \exp\left(\sum_{i=1}^k x_i X_i\right)$ eine Parametrisierung um $1 \in G$. Die Koordinaten (x_1, \dots, x_k) nennt man kanonische Koordinaten 1. Art bezüglich der Basis X_1, \dots, X_k .

8. Homomorphismen von Liegruppen und Liealgebren

Def.: Es seien G und G' zwei lineare Liesche Gruppen. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi: G \rightarrow G'$ ist ein Homomorphismus von G nach G' falls für alle $a, b \in G$:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Ist φ ein Diffeomorphismus und ein Homomorphismus, dann ist φ ein Isomorphismus.

Def.: Es seien \mathfrak{g} und \mathfrak{g}' zwei Liealgebren. Eine lineare Abbildung L von \mathfrak{g} nach \mathfrak{g}' ist ein Liealgebren Homomorphismus falls für beliebige Elemente $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$L([X, Y]) = [L(X), L(Y)].$$

Ist L bijektiv, dann ist L ein Liealgebren Isomorphismus.

Wir betrachten jetzt einen Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow G'$ zwischen zwei linearen Lieschen Gruppen G und G' mit Liealgebren \mathfrak{g} und \mathfrak{g}' . φ induziert eine lineare Abbildung $T_e(\varphi): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$. Wir zeigen, dass $T_e(\varphi)$ ein Liealgebren Homomorphismus ist. Nun gilt mit den Bezeichnungen in Abschnitt 6

$$\begin{aligned} T_e \varphi([X, Y]) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(C(s)) = \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left\{ \varphi(A(\sqrt{s})) \varphi(B(\sqrt{s})) \varphi^{-1}(A(\sqrt{s})) \varphi^{-1}(B(\sqrt{s})) \right\}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(A(s)) = T_e \varphi(X) ,$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(B(s)) = T_e \varphi(Y) .$$

Die Rechnung in Abschnitt 6 zeigt deshalb, dass

$$T_e \varphi([X, Y]) = [T_e \varphi(X), T_e \varphi(Y)] .$$

Wir formulieren das wichtige Ergebnis im folgenden

Satz 8: Sei $\varphi: G \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus zwischen linearen Lieschen Gruppen G und G' , dann induziert die Tangentialabbildung $T_e \varphi$ beim Einselement von G einen Homomorphismus $T_e \varphi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ zwischen den zugehörigen Lieschen Algebren.

Lokal kann man in einem gewissen Sinne die Umkehrung zeigen. Wir wollen aber hier nicht näher darauf eingehen.

In der Quantenmechanik spielt auch der Begriff einer Darstellung eine Rolle.

Def.: Eine Darstellung einer Lieschen Gruppe G ist ein Homomorphismus $\varphi: G \longrightarrow GL(n, K)$, $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. n ist die Dimension der Darstellung. Analog ist eine Darstellung einer Lieschen Algebra \mathfrak{g} ein Homomorphismus $\varrho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, K)$. n ist die Dimension der Darstellung.

Nach Satz 8 induziert jede Darstellung einer Liegruppe eine Darstellung der zugehörigen Liealgebra.

9. Liesche Transformationsgruppen

Dieser Abschnitt ist besonders wichtig für § 8.3.

Def. Es sei G eine lineare Liesche Gruppe und M eine Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n . Die Gruppe G ist eine Liesche Transformationsgruppe von M , falls eine differenzierbare Abbildung $\tau : G \times M \longrightarrow M$ gegeben ist mit den Eigenschaften

$$(i) \quad \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 g_2}, \text{ wo } \tau_g(x) := \tau(g, x)$$

$$(ii) \quad \tau_e = \text{Id}.$$

Die Abbildung $\tau_g : M \longrightarrow M$ ist natürlich differenzierbar. Da ferner $\tau_g \circ \tau_{g^{-1}} = \text{Id}$ ist τ_g ein Diffeomorphismus von M .

Sei \mathfrak{g} die Liealgebra zu G . Zu $X \in \mathfrak{g}$ betrachten wir die 1-parametrische Untergruppe $A(s) = \exp(sX)$. Dann ist $s \longmapsto \tau_{A(s)}$ eine 1-parametrische Gruppe von Transformationen von M . Das zugehörige Vektorfeld ^{*}) bezeichnen wir mit X^* . Durch die Zuordnung $X \longmapsto -X^*$ ist eine Abbildung $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ von \mathfrak{g} in die Menge der Vektorfelder über M definiert.

In $\mathfrak{X}(M)$ definieren wir das Klammerprodukt zwischen zwei Vektorfeldern X und Y wie folgt: Sei $x \in M$ und f eine Parametrisierung von M um den Punkt x . § und η

^{*}) Ist ϕ_t eine 1-parametrische Transformationsgruppe (G ist in der obigen Def. die Gruppe \mathbb{R}). Das zugehörige Vektorfeld ist so definiert: $X(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right|_{t=0}$.

seien die Repräsentanten von X und Y . Das Klammerprodukt $[\xi, \eta]$ wurde bereits in § 7.1 definiert. Dieses sei definitionsgemäss der Repräsentant $^*)$ von $[X, Y]$. Mit dem so erklärten Klammerprodukt wird $\mathfrak{X}(M)$ eine Liealgebra. Nun beweisen wir den

Satz 9: Mit den obigen Bezeichnungen ist $\varrho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ ein Liealgebren Homomorphismus.

Beweis: Wir wählen einen beliebigen Punkt $x \in M$ und betrachten die Abbildung $g \longmapsto \psi_x(g) := \tau_g(x)$ von G nach M . Nach Voraussetzung ist dies eine diffb. Abbildung. Der Vektor $X^*(x)$ ist der Tangentialvektor an die Kurve $s \longmapsto \psi_x(A(s))$ an der Stelle $s = 0$, d.h.

$$X^*(x) = T_e(\psi_x) \cdot X. \quad (1)$$

Daraus folgt

$$(X+Y)^*(x) = T_e(\psi_x) \cdot (X+Y) = X^*(x) + Y^*(x)$$

und ebenso $(\lambda X)^*(x) = \lambda X^*(x)$. Da der Punkt x beliebig ist, ist damit die Linearität von ϱ bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass $-[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$ ist. Um dies einzusehen, benutzen wir die folgende Formel, die wir weiter unten beweisen

$$[X^*, Y^*](x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left\{ Y^*(x) - (\tau_{A(s)}^* Y^*)(x) \right\}, \quad (2)$$

Nun ist (siehe den Abschnitt 4)

$$(\tau_{A(s)}^* Y^*)(x) = T_{A^{-1}(s) \cdot x} (\tau_{A(s)}) \cdot Y^*(A^{-1}(s) \cdot x),$$

*) Zeige, dass diese Def. unabhängig von der Parametris. ist.

wobei wir die Operation der Gruppe auf M durch einen Punkt angedeutet haben: $\tau_g(x) \equiv g \cdot x$.

Nach (1) ist dies

$$\begin{aligned} (\tau_{A(s)}^* Y^*)(x) &= T_{A^{-1}(s) \cdot x} (\tau_{A(s)}) T_e(\phi_{A^{-1}(s) \cdot x}) \cdot Y \\ &= T_e(\tau_{A(s)} \circ \phi_{A^{-1}(s) \cdot x}) \cdot Y \end{aligned} \quad (3)$$

Nun benutzen wir

$$\begin{aligned} (\tau_{A(s)} \circ \phi_{A^{-1}(s) \cdot x})(g) &= \tau_{A(s)}(\tau_g(A^{-1}(s) \cdot x)) \\ &= \tau_{A(s) \cdot g}(A^{-1}(s) \cdot x) = \tau_{A(s)g} A^{-1}(s)(x) \\ &= \phi_x(A(s)g A^{-1}(s)) = (\phi_x \circ \phi_s)(g), \end{aligned} \quad (4)$$

wo ϕ_s die Abbildung $g \mapsto A(s)g A^{-1}(s)$ bezeichnet.

Nach der Kettenregel ist deshalb die rechte Seite von (3)

$$(\tau_{A(s)}^* Y^*)(x) = T_e(\phi_x \circ \phi_s) Y = T_e(\phi_x) T_e(\phi_s) Y \quad (5)$$

Mit (1) und (5) wird aus (2)

$$[X^*, Y^*](x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} T_e(\phi_x) \{ Y - T_e(\phi_s) \cdot Y \}. \quad (6)$$

Nun benötigen wir $T_e(\phi_s) Y$. Dies ist nach Definition der Tangentialabbildung

$$T_e(\phi_s) \cdot Y = \left. \frac{d}{d\tau} \phi_s(B(\tau)) \right|_{\tau=0}, \quad B(0) = 1, \quad \frac{dB(\tau)}{d\tau} = Y$$

und $B(\tau)$ eine Kurve in G . Dies bedeutet

$$T_e(\phi_s) \cdot Y = \left. \frac{d}{d\tau} A(s) B(\tau) A^{-1}(s) \right|_{\tau=0} = A(s) Y A^{-1}(s), \quad (7)$$

Setzen wir dies in (6) ein, so kommt

$$[X^*, Y^*](x) = - T_e(\psi_x) \frac{d}{ds} A(s) Y A^{-1}(s) \Big|_{s=0} = - T_e(\psi_x)([X, Y]),$$

Mit (1) beweist dies $[X^*, Y^*] = - [X, Y]^*$,

d.h. φ ist ein Liealgebren Homomorphismus.

Wir müssen noch die Richtigkeit von (2) zeigen. Dazu beweisen wir den

Satz 10: Es seien X und Y Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^n und es sei ϕ_t der Fluss zu X .

Dann gilt

$$[X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ Y(p) - (\phi_{t*} Y)(p) \}. \quad (8)$$

Beweis: Wir wählen eine Parametrisierung $f: V \subset \mathbb{R}^r \rightarrow M$ ($r = \dim M$) einer Umgebung von $p \in M$ mit $p = f(a)$. Die Repräsentanten von X und Y in \mathbb{R}^k seien ξ und η . [$X(f(x)) = Df(x) \cdot \xi(x)$, etc.] φ_t sei der Fluss zu ξ . Natürlich gilt $\phi_t(f(x)) = f(\varphi_t(x))$. Die linke Seite von (8) ist nach Def.

$$[X, Y](p) = Df(a) \cdot [\xi, \eta](a).$$

Für die rechte Seite gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ Y(p) - (\phi_{t*} Y)(p) \} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ Df(a) \cdot \eta(a) - \\ &- Df(a) \cdot (\varphi_{t*} \eta)(a) \} = Df(a) \lim_{t \rightarrow 0} \{ \eta(a) - (\varphi_{t*} \eta)(a) \}. \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass die Gleichung (8) im Parameterraum gilt:

$$[\xi, \eta](a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \eta(a) - (\varphi_{t*} \eta)(a) \}. \quad (9)$$

Nun ist nach Definition

$$(\varphi_t * \eta)(a) = D\varphi_t(\varphi_t^{-1}(a)) \cdot \eta(\varphi_t^{-1}(a)), \quad (10)$$

Die rechte Seite von (10) hat die Struktur $A_t v_t$ mit $A_0 = \mathbb{1}$. Wir haben folgendes zu betrachten:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (v_0 - A_t v_t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} (v_0 - v_t) - \frac{1}{t} (A_t - \mathbb{1}) v_t \right\} \\ &= - \left. \frac{dv_t}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{dA_t}{dt} \right|_{t=0} \cdot v_0. \end{aligned}$$

In unserem Falle ist $v_t = \eta(\varphi_t^{-1}(a)) = \eta(\varphi_{-t}(a))$.

Folglich ist nach der Kettenregel

$$- \left. \frac{dv_t}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \eta(\varphi_t(a)) \right|_{t=0} = D\eta(a) \cdot \xi(a).$$

Ferner ist $A_t = D\varphi_t(\varphi_t^{-1}(a))$, $v_0 = \eta(a)$.

Deshalb

$$\begin{aligned} \left. \frac{dA_t}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} D\varphi_t(a) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} \underbrace{D\varphi_0(\varphi_{-t}(a))}_{\mathbb{1}} \right|_{t=0} \\ &= D \left(\left. \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \right|_{t=0} \right) (a) = D\xi(a). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für die rechte Seite von (9)

$$D\eta(a) \cdot \xi(a) - D\xi(a) \cdot \eta(a).$$

Die i^{te} Komponente davon ist $(\xi_j \eta_{i,j} - \eta_j \xi_{i,j})$, und dies ist in der Tat die i^{te} Komponente von $[\xi, \eta]$ (siehe (7.13)).

Satz 11: Es sei ϕ_t der Fluss zu einem Vektorfeld X auf der Mannigfaltigkeit M in \mathbb{R}^n und $\psi: M \rightarrow M$ sei ein Diffeomorphismus. Dann ist $\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}$ der Fluss zum Vektorfeld $\psi_* X$.

Beweis: Das Vektorfeld Y zur (lokalen) 1-parametrischen Transformationsgruppe $\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}$ ist gegeben durch (siehe die Abschnitte 3 und 4)

$$\begin{aligned} Y(\psi(x)) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\psi \circ \phi_s \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \psi \circ \phi_s(x) = \\ &= T_x \psi \cdot X(x) = (\psi_* X)(\psi(x)). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 12: Mit den Bezeichnungen von Satz 11 ist $\psi_* X = X$ genau dann, wenn $\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1} = \phi_t$ ist.

Beweis: Aus Satz 11 folgt, dass $\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1} = \phi_t$ die Aussage $\psi_* X = X$ impliziert. Gilt umgekehrt $\psi_* X = X$, so beweisen wir $\psi \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi$. Dazu wenden wir beide Seiten dieser Gleichung auf einen festen Punkt x an und zeigen, dass beide Seiten dieselbe Differentialgleichung in t erfüllen. Da für $t = 0$ beide Seiten übereinstimmen, folgt dann die Behauptung. Nun erfüllt $\alpha_1(t) := \psi(\phi_t(x))$ die Gleichung

$$\dot{\alpha}_1(t) = T_{\phi_t(x)} \psi \frac{d}{dt} \phi_t(x),$$

oder, wegen

$$\frac{d}{dt} \phi_t(x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \phi_{t+s}(x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \phi_s(\phi_t(x)) = X(\phi_t(x)),$$

auch

$$\dot{\alpha}_1(t) = T_{\phi_t(x)} \psi_* X(\phi_t(x)) = (\psi_* X)(\psi(\phi_t(x))) = X(\psi(\phi_t(x))),$$

oder

$$\dot{\alpha}_1(t) = X(\alpha_1(t)).$$

Andererseits gilt für $\alpha_2(t) := \phi_t(\psi(x))$

$$\dot{\alpha}_2(t) = X(\phi_t(\psi(x))) = X(\alpha_2(t)). \quad \square$$

Satz 13: Es seien X und Y Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M in \mathbb{R}^n , welche lokale 1-parametrische Transformationsgruppen ϕ_t und ψ_t erzeugen. Dann ist $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ äquivalent zur Gleichung $[X, Y] = 0$.

Beweis: Wir zeigen nur eine Richtung dieses Satzes vollständig. Aus $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ für alle s, t folgt nach Satz 12 $(\phi_t)_* Y = Y$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Satz 10 folgt daraus $[X, Y] = 0$. Umgekehrt kann man mit Hilfe von Satz 10 zeigen, dass aus $[X, Y] = 0$ für alle t die Gleichung $(\phi_t)_* Y = Y$ folgt (Übung). Dies impliziert nach Satz 12 auch $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ für alle s, t . \square

Die folgenden Bemerkungen werden beim Kreisel eine Rolle spielen.

Wir betrachten eine lineare Liesche Gruppe G mit Liealgebra \mathfrak{g} . Bezüglich der Linksmultiplikation $g \rightarrow L_g : L_g(h) = gh, g, h \in G$, ist G eine Liesche Transformationsgruppe von G , da $L_{g_1 g_2} = L_{g_1} L_{g_2}$ und $L_e = \text{Id}$. Mit R_g bezeichnen wir die Rechtsmultiplikation: $R_g(h) = hg$.

Nun sei $X \in \mathfrak{g}$ und $A(s) = \exp(sX)$ die zugehörige 1-parametrische Untergruppe von G . Ferner betrachten wir die 1-parametrische Gruppe $L_{A(s)}$ von Transformationen von G . Das zugehörige Vektorfeld bezeichnen wir wie auf Seite 369 mit X^* . X^* ist rechtsinvariant: $(R_g)_* X^* = X^*$, denn $R_g L_{A(s)} = L_{A(s)} R_g$ und die Behauptung folgt aus Satz 12. Ferner ist $X \mapsto X^*$ nach Satz 9 ein Liealgebren Homomorphismus; d.h. $X \mapsto X^*$ ist ein Liealgebren Antihomomorphismus (d.h. $[X, Y]^* = -[X^*, Y^*]$).

Entsprechende Aussagen erhält man durch Vertauschen von links mit rechts. Man muss aber auf Vorzeichen aufpassen. Da

$$R_{g_1 g_2} = R_{g_2} R_{g_1}$$

(beachte die Reihenfolge rechts!) erhält man durch

$\tau_g := R_{g^{-1}}$ eine Realisierung von G (in G !). Das Vektorfeld zu $\tau_{A(s)}$ sei \tilde{X} . Dieses ist linksinvariant und die Zuordnung $X \mapsto \tilde{X}$ ist wieder ein Homomorphismus von Lieschen Algebren. Dies bedeutet: Ist $X^\#$ das Vektorfeld zur 1-parametrischen Transformationsgruppe $R_{A(s)}$, so ist (da $X^\# = -\tilde{X}$) $X^\#$ linksinvariant und $X \mapsto X^\#$ ist ein Liealgebren Homomorphismus. Wir fassen das Resultat schematisch zusammen:

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto A(s) = \exp sX ; \quad (11)$$

$$\begin{array}{ccc} L_{A(s)} & , & R_{A(s)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^* & & X^\# \end{array} , \quad X^* \text{ rechtsinvariant, } X^\# \text{ linksinvariant ;}$$

$$X \mapsto X^* : \text{ Antihomom. , } \quad X \mapsto X^\# : \text{ Homom.}$$

Da $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$ vertauschen nach Satz 13 die Vektorfelder X^* und $Y^\#$

$$[X^*, Y^\#] = 0. \quad (12)$$

[In der hier verwendeten Richtung wurde der Satz 13 bewiesen].

Sei X_i eine Basis von \mathfrak{g} . Da \mathfrak{g} eine Liealgebra ist, können wir schreiben

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k. \quad (13)$$

Nach dem Gesagten gilt

$$\begin{aligned} [X_i^*, X_j^*] &= - \sum_k c_{ij}^k X_k^* \\ [X_i^\#, X_j^\#] &= + \sum_k c_{ij}^k X_k \\ [X_i^*, X_j^\#] &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

Aus diesen Vertauschungsrelationen werden sich in § 11.5 die Poissonklammern für die körperfesten und die raumfesten Drehimpulse beim Kreisel ergeben. Beachte den Vorzeichenwechsel von der ersten zur zweiten Zeile.

* * *

ANHANG III. BERECHNUNG DER INTEGRALE (10.100).

Als Beispiel führen wir die Berechnung von

$$J = \oint \sqrt{2m(E + \frac{k}{r}) - \alpha_{\mathcal{G}}^2 / r^2} \quad dr \quad (1)$$

für $E < 0$ vor. Mit den Abkürzungen

$$A = 2m E < 0 \quad , \quad B = mk \quad , \quad C = \alpha_{\mathcal{G}}^2 \quad (2)$$

ist

$$J = \oint \sqrt{A + 2 \frac{B}{r} - \frac{C}{r^2}} \quad dr .$$

Der Radikand hat positiv reelle Nullstellen $r_1 < r_2$ und ist in $r_1 < r < r_2$ positiv ($A < 0$!). Das Integral erstreckt sich von r_1 nach r_2 und zurück. Auf dem ersten Wegstück ($r_1 \rightarrow r_2$) ist $p_r = m\dot{r} > 0$, also das positive Zeichen der Wurzel zu nehmen. Beim Rückweg hat man hingegen das negative Vorzeichen zu wählen.

Der Integrand

$$f(r) := \sqrt{A + 2 \frac{B}{r} - \frac{C}{r^2}} = \frac{1}{r} \sqrt{A(r-r_1)(r-r_2)} \quad (3)$$

hat in r_1 und r_2 Verzweigungspunkte 1. Ordnung. Schneiden wir die komplexe r -Ebene längs des Intervalls $[r_1, r_2]$ der reellen Achse auf, dann ist $f(r)$ eindeutig. Wir setzen die Wurzel auf dem unteren Ufer des Schnittes als positiv voraus. Um zum oberen Ufer zu gelangen, müssen wir einen Verzweigungspunkt umgehen und somit ist die Wurzel auf dem oberen Ufer negativ. J ist also das Integral von f längs des gesamten Randes des Schnittes in positiver Richtung und also auch gleich dem Wegintegral von f über γ der Figur:

$$J = \int_{\gamma} f(r) \quad dr . \quad (4)$$

Der einfache Pol bei $r = 0$ muss dabei im Auusseren von γ liegen.

In der Nähe von $r = 0$ und $r = \infty$ haben wir

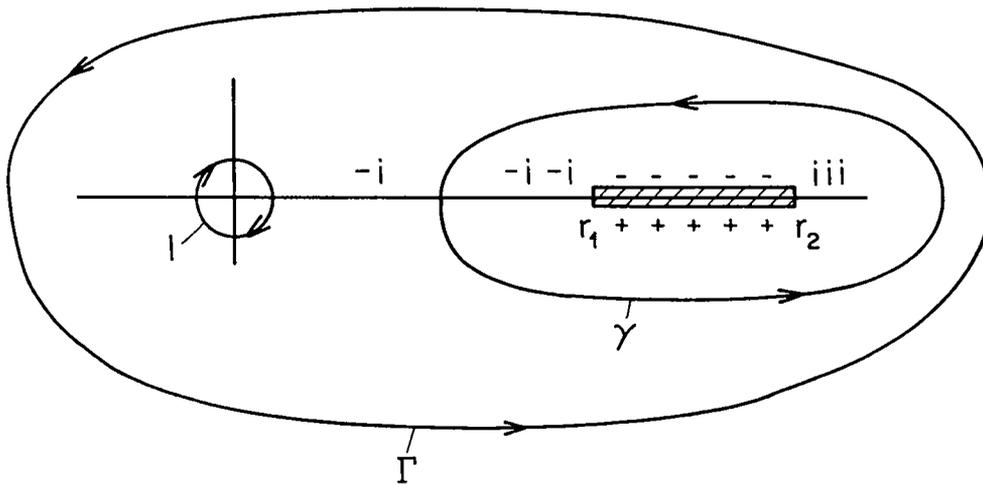
$$f(r) = \frac{\sqrt{-C}}{r} \left(1 - \frac{B}{C} r + \dots\right), \quad \sqrt{-C}: \text{negativ imaginär}, \quad (5)$$

bzw.

$$f(r) = \sqrt{A} \left(1 + \frac{B}{A} \frac{1}{r} + \dots\right), \quad \sqrt{A}: \text{positiv imaginär}. \quad (6)$$

Nach dem Cauchyschen Satz ist das Wegintegral (4) gleich der Summe der Wegintegrale längs Γ um den Punkt ∞ und über den Weg γ , der um $r = 0$ herumführt, mit den in der Figur angegebenen Orientierungen. Folglich gilt mit (5), (6) und (2)

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \left[\frac{B}{\sqrt{-A}} - \sqrt{-C} \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{mk}{\sqrt{-2mE}} - \alpha \vartheta \right]. \end{aligned}$$



* * *

U E B U N G E N

1. Relativ zu einem starren Bezugssystem sei die physikalische Längenmessung erklärt. Beschreibe einen (oder mehrere) Test, welcher überprüfen soll, ob der Euklidische Raum ein gutes Modell für den physikalischen Raum ist.

2. Ein Zentralfeld-Potential $V(r)$ sei homogen vom Grade d ,
$$V(\lambda r) = \lambda^d V(r) \quad \text{für alle } \lambda > 0 .$$
Zeige, dass mit einer Bahn γ auch die dilatierte Kurve $\lambda\gamma$ eine Bahn ist. Bestimme das Verhältnis der Durchlaufzeiten der beiden Bahnen. Leite daraus die Isochronizität des Pendels und das dritte Keplersche Gesetz her.

3. Betrachte ein geladenes Teilchen (Masse m , Ladung e) im homogenen Magnetfeld \underline{B} , auf welches zusätzlich ein homogenes Gravitationsfeld wirken möge. Der Vektor \underline{g} der Schwerebeschleunigung stehe senkrecht auf \underline{B} .
Durch eine geeignete Transformation auf ein gleichförmig bewegtes Bezugssystem transformiere man das \underline{g} -Feld weg. Wie muss man die Relativgeschwindigkeit (Driftgeschwindigkeit) wählen ?

- 4a) Für eine ebene Bewegung $\underline{x}(t)$ leite man die folgenden Gleichungen ab
$$\dot{\underline{x}} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi$$
$$\ddot{\underline{x}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \underline{e}_\varphi ,$$
wobei (r, φ) die Polarkoordinaten von $\underline{x}(t)$ sind und \underline{e}_r , \underline{e}_φ die radialen und azimuthalen Einheitsvektoren bezeichnen.

4b) Im Ring $\{r_0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ sei das Kraftfeld $\underline{F} = a \frac{r}{R} \underline{e}_\varphi$ ($a = \text{const}$) gegeben. Suche Lösungen der zugehörigen Bewegungsgleichungen.

5. Betrachte die Bewegung eines geladenen Teilchens (Masse m , Ladung e) im Feld eines (hypothetischen) magnetischen Monopols mit dem Magnetfeld $\underline{B} = (g/r^2) \underline{e}_r$. Zeige zunächst, dass

$$\underline{x}^2(t) = v^2 t^2 + d^2, \quad v = \text{const}, \quad d = \text{kleinster Abstand vom Monopol.}$$

Beweise sodann, dass der übliche Bahndrehimpuls $\underline{L} = m \underline{x} \wedge \dot{\underline{x}}$ nicht erhalten ist, wohl aber

$$\underline{J} = \underline{L} - eg \underline{e}_r.$$

Schliesse daraus, dass sich das Teilchen auf einem Kegel bewegt. Beschreibe diesen, insbesondere seinen Öffnungswinkel.

6. Das folgende dynamische System stellt ein einfaches Räuber-Beute Modell (ohne "soziale Reibungsterme") dar:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - \beta y) x \\ \dot{y} &= (\delta x - \gamma) y, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0. \end{aligned}$$

Skizziere das zugehörige Vektorfeld, sowie das Phasenportrait.

7a. Man betrachte das dynamische System:

$$\dot{r} = f(r), \quad \dot{\varphi} = -1, \quad (0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi),$$

mit dem Vektorfeld $X(r, \varphi) = (f(r), -1)$.

Berechne das transformierte Vektorfeld $\psi_* X$ unter der Transformation

$$\psi : (r, \varphi) \longmapsto (x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi).$$

7b. Nun sei speziell $f(r) = r(1-r^2)$. Skizziere das Phasenportrait von $\psi_* X$. Welche Gleichgewichtspunkte hat das transformierte Vektorfeld? Welche Rolle spielt der Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 1$?

8. Ausgehend von den Newtonschen Bewegungsgleichungen für ein System von Massenpunkten,

$$\ddot{\underline{x}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_j (\underline{x}_i - \underline{x}_j)}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|^3},$$

leite man folgende Beziehung ab:

$$\frac{1}{2} \dot{I} = 2 T + V.$$

Dabei ist T die kinetische Energie, V die potentielle Energie und I das Trägheitsmoment:

$$I = \sum m_i x_i^2.$$

9. Man beweise, dass die Gravitationskraft ausserhalb einer Kugel mit kontinuierlicher kugelsymmetrischer Massenverteilung gleich ist der Kraft eines im Kugelmittelpunkt gedachten Massenpunktes, dem als Masse die Gesamtmasse der Kugel zugeordnet wird (Satz von Newton).
10. Zeige, dass für ein Teilchen im Coulomb-Potential $V(r) = -\alpha/r$ der Lenzsche Vektor

$$\frac{\underline{p} \wedge \underline{L}}{\alpha m} - \frac{\underline{x}}{r}$$

erhalten ist.

11. Ein Doppelstern werde (der Einfachheit halber) in der Bahnebene beobachtet. Der Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der Richtung zum Perizentrum sei $\pi/2 - \omega$. Man zeige, dass die Komponente der Geschwindigkeit des Sterns l in der Beobachtungsrichtung als Funktion des Bahnazimuts φ (gemessen von der Richtung zum Perizentrum) folgendermassen variiert:

$$v_{\text{beob}} = v_l [\varepsilon \cos \omega + \cos(\varphi + \omega)] \quad (\varepsilon: \text{Exzentrizität}),$$

mit

$$v_1 = \frac{G^{\frac{1}{2}} m_2}{[(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{\frac{1}{2}}} \cdot$$

Zeige, dass

$$f_1 := \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{T}{2\pi G} (1-e^2)^{3/2} v_1^3,$$

wo T die Umlaufperiode ist, sowie

$$v_1 = \frac{2\pi}{T} \frac{a_1}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (a_1: \text{grosse Halbachse von Stern 1}).$$

Was kann man aus den Messungen von v_{beob} eines Sterns (mit dem Doppler-Effekt) grundsätzlich bestimmen ?

12. Betrachte einen Massenpunkt in einem zentralsymmetrischen Potential $V(r) = -\alpha/r + \delta V(r)$, wobei $\delta V(r)$ eine kleine Störung des Newtonschen Potentials ist (Abplattung der Sonne, allgemein relativistische Korrektur, etc.) Dies hat zur Folge, dass die Bahn bei beschränkter Bewegung nicht mehr geschlossen ist und sich das Perihel der Bahn bei jedem Umlauf um den kleinen Winkel $\delta\phi$ verschiebt. Berechne $\delta\phi$ für die Fälle
- a) $\delta V = \beta/r^2$, b) $\delta V = \gamma/r^3$.

Anleitung: Zeige zunächst, dass allgemein

$$\delta\phi = -2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(E-V) - L^2/r^2} dr$$

ist ($r_{1,2}$: radiale Umkehrpunkte).

13. Betrachte ein geladenes Teilchen in einem axialsymmetrischen Magnetfeld. Leite mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus zwei erste Integrale her.

Anleitung: Benutze Zylinderkoordinaten.

In der Uebungsbesprechung wird eine Anwendung dieser Aufgabe auf den Strahlungsgürtel der Erde (Van-Allen-Gürtel) vorgeführt.

14. Welche allgemeine Form muss die Kraft $\underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$ auf einen Massenpunkt haben, damit diese von der Form

$$F(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\underline{x}}} - \frac{\partial V}{\partial \underline{x}}$$

ist ?

15. Benutze die Antwort der letzten Aufgabe, um die Lagrange-funktion eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld systematisch zu finden.

16. Suche eine Lagrangefunktion für die eindimensionale Bewegung mit Reibung

$$\ddot{x} = F(x) - c \dot{x} .$$

Anleitung: Versuche einen nichtautonomen Ansatz der Form

$$L(x, \dot{x}, t) = f(t) \mathcal{L}(x, \dot{x}) .$$

17. Häufig hat die Lagrangefunktion die Form $L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - V(q_1, \dots, q_f)$, wobei $g_{ik}(q)$ für jedes q eine positiv definite quadratische Form ist. Man bringe die Eulerschen Gleichungen zu L in die folgende Form

$$\ddot{q}_k + \sum_{r,s} \Gamma_{rs}^k \dot{q}_r \dot{q}_s = Q_k ,$$

Darin sind Γ_{rs}^k die sog. Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{rs}^k = \sum_i g^{ki} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial q_s} + \frac{\partial g_{si}}{\partial q_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial q_i} \right) ,$$

wobei (g^{ik}) die zu (g_{ik}) inverse Matrix bezeichnet.

Ferner ist

$$Q_k := - \sum_i g^{ki} \frac{\partial V}{\partial q_i} .$$

18. In der Vorlesung wurde das sphärische Pendel mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art behandelt. Leite alle wichtigen Ergebnisse mit den Lagrangeschen Gleichungen 1. Art ab.

19. Betrachte die reibungsfreie Bewegung eines Massenpunktes auf einem Rotationsellipsoid. Bestimme die Lagrangefunktion dieser geodätischen Bewegung in den Koordinaten (ϑ, φ) , welche die Oberfläche des Ellipsoides gemäss

$$x = a \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = a \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = b \cos \vartheta$$

- parametrisieren, wobei a und b die Hauptachsen des Ellipsoides sind. Zeige, dass die Integration der Bewegungsgleichungen auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Diskutiere die Bewegung analog wie das sphärische Pendel im Skript.
20. Bestimme die Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld.

21. Beweise den folgenden

Satz: (i) Ist λ ein Eigenwert einer symplektischen linearen Transformation M der Multiplizität k , so ist $1/\lambda$ ebenfalls ein Eigenwert von M mit derselben Multiplizität.

(ii) Mit λ ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert mit derselben Multiplizität.

(iii) Falls die Eigenwerte 1 und -1 von M vorkommen, so sind ihre Multiplizitäten gerade.

22. Bestimme die Gleichgewichtslagen des folgenden dynamischen Systems als Funktion des Bifurkationsparameters p und diskutiere deren Stabilität:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p - \gamma x - y^2 \\ \dot{y} &= -\gamma y + x y, \end{aligned}$$

23. Parametrische Resonanz (Skript, § 6.3):

Bestimme die Instabilitätszonen in der ω, ε - Ebene für die Gleichung

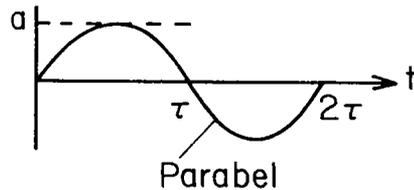
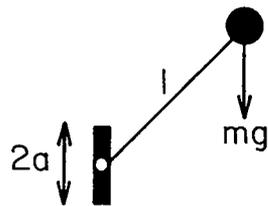
$$\ddot{x} = -f^2(t) x ,$$

wobei

$$f(t) = \begin{cases} \omega + \varepsilon & , \quad 0 < t < \tau \\ \omega - \varepsilon & , \quad \tau < t < 2\tau \end{cases} , \quad \varepsilon \ll 1 ,$$

$$f(t+2\tau) = f(t) .$$

24. Man betrachte ein Pendel, dessen Aufhängepunkt in der vertikalen Richtung oszilliert (vgl. Fig.). Während jeder



l : Länge des Pendels

a : Amplitude des Aufhängepunktes

2τ : Periode der Oszillation des Aufhängepunktes

Periodenhälfte sei die Beschleunigung des Aufhängepunktes konstant und gleich $\pm c$, $c = 8a/\tau^2$. Zeige, dass die aufrechte Stellung des Pendels für genügend rasche Oszillationen des Aufhängepunktes stabil ist.

25. Bestimme ein vollständiges Integral der verkürzten Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung für die Bewegung eines Teilchens im Potential

$$V = -\frac{A}{r} - Fz .$$

(Überlagerung eines Coulomb- und eines homogenen elektrischen Feldes.)

Anleitung: Wähle parabolische Koordinaten (ξ, η, φ) , welche mit Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) wie folgt zusammenhängen:

$$z = \frac{1}{2} (\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi \eta}.$$

26. Man zeige für ein abgeschlossenes 2-Teilchensystem, dass die folgenden sechs Integrale in Involution sind:

$$P_1, P_2, P_3, H_{\text{rel}}, |\underline{L}_{\text{rel}}|^2, L_{\text{rel}}^3.$$

27. Man zeige, dass für das Kepler-Problem

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{|\underline{x}|},$$

die ersten Integrale

$$\underline{L} = \underline{x} \wedge \underline{p}, \quad \underline{A} = \underline{p} \wedge \underline{L} + m\alpha \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \quad (\text{Lenzscher Vektor})$$

die folgenden Poissonklammern haben:

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \varepsilon_{ijk} L_k, & \{L_i, A_j\} &= \varepsilon_{ijk} A_k \\ \{A_i, A_j\} &= -2m H \varepsilon_{ijk} L_k. \end{aligned}$$

28. Zeige, dass sich die kanonischen Transformationen 3. Art wie folgt durch erzeugende Funktionen darstellen lassen:

$$q_k = - \frac{\partial F_3}{\partial p_k}, \quad p_k = - \frac{\partial F_3}{\partial Q_k}.$$

Hier ist F_3 eine Funktion der (Q_k, p_k) , welche die Bedingung

$$\text{Det} \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_k \partial p_j} \right) \neq 0$$

erfüllt.

29. Mit den Bezeichnungen von § 11.7 betrachte man den dort am Schluss angedeuteten Fall, dass E nur wenig grösser ist als $J_\psi^2/2C$. Zeige, dass dann näherungsweise gilt

$$E(J) \simeq \frac{1}{2C} J_\psi^2 + \frac{1}{A} J_\psi \cdot J_\vartheta + H_1,$$

wobei H_1 von der potentiellen Energie $Mg \cos \delta$ herührt. Deute die Präzession des Kreisels als säkulare Störung durch die Schwere.

L I T E R A T U R

1. Analysis

Für die Zwecke dieser Vorlesung besonders geeignet (und erschwinglich) ist:

- [1] T. Bröcker: Analysis in mehreren Variablen. Teubner Studienbücher (Mathematik), 1980.

Ferner empfehle ich:

- [2] S. Lang: Real Analysis, Addison-Wesley 1969.
[3] R. Abraham, J.E. Marsden, T. Ratiu: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Addison-Wesley 1983.

2. Differentialgleichungen

Ein sehr schönes und im geometrischen Geist verfasstes Buch ist:

- [4] V.I. Arnold: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 1980

Dazu gibt es den Ergänzungsband:

- [5] V.I. Arnold: Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 250, Springer 1983.

Ferner empfehle ich:

- [6] H. Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter 1983.
[7] M.W. Hirsch, S. Smale: Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press 1974.

3. Mechanik

- [8] V.I. Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer 1978.

Dieses Buch empfehle ich ganz besonders. Ebenfalls mehr vom Standpunkt des Mathematikers ist:

- [9] G. Gallavotti: The Elements of Mechanics, Texts and Monographs in Physics, Springer 1983.
Mehr im traditionellen Sinne, vor allem für Physiker, sind:
- [10] H. Goldstein: Classical Mechanics, Second Edition, Addison-Wesley 1980.
- [11] A.L. Fetter, J.D. Walecka: Theoretical Mechanics of Particles and Continua, McGraw-Hill 1980.

4. Dynamische Systeme

Eine sehr gute Einführung in die qualitative geometrische Theorie gibt:

- [12] J. Palis, W. de Melo: Geometric Theory of Dynamical Systems, Springer 1982.

Daneben empfehle ich u.a.:

- [13] A.J. Lichtenberg, M. Leiberman: Regular and Stochastic Motion, Springer 1982.
- [14] J. Guckenheimer, P. Holmes: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields, Springer 1983.

5. Ergodentheorie

Hier empfehle ich vor allem:

- [15] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya.G. Sinai: Ergodic Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 245, Springer 1982.

S A C H W O R T V E R Z E I C H N I S

- aeussere Ableitung 349
- aeusseres Produkt 348
- affiner Raum 3
- affines Koordinatensystem 4
- d'Alembertsches Prinzip 106ff
- Anharmonischer Oszillator 266
- abgeschlossen, mechanisch 22
- absoluter Raum 9
 - Zeit 8f
- Adiabatensatz 280
- adiabatische Invariante 279
- Aequator 319
- Arbeitsleistung 26
 - , virtuelle 107
- Arnold V.I. 261, 283ff, 288f
- autonome Differentialgleichung she.
Differentialgleichung
 - Systeme 266f

- Beschleunigtes Bezugssystem 72ff
- Beschleunigung 12
- Bewegungsgleichungen 12ff
 - , für Spinkomponenten 233
 - , kanonische she. kanonisch
 - , Newtonsche 20
- Bifurkationspunkt 120
- Bloch Wellen 234f
- Brahe Tycho 15
- Brillouinzone, erste 235

- Cartan, Satz von 361
- Christoffelsymbole 389
- Coriolisbeschleunigung 77

- Darboux'sches Theorem 140
- Darstellung einer Lieschen Gruppe 368
- Delaunaysche Bahnelemente 299
- Diffeomorphismus 352
- Differential 341
- Differentialform, lineare 344
 - , vom Grade p 348
- Differentialgesetze
- Differentialgleichung 35ff
 - , autonome 38
 - , kanonische she. kanonisch
 - , lineare 37
 - , Lösung einer 36f
 - , Existenz- und Eindeutigkeitssatz für 44

Differentialgleichung, nicht autonome 38
 Doppelstern 382f
 Drehgruppe 72ff
 - und Kreisel 325ff
 Drehimpuls 28, 306
 - , innerer 29
 - , körperfester she. relativer
 - , relativer 63, 307
 - satz 27f, 99f, 220
 Drehmoment 28
 Dreikörperproblem, restringiertes 184ff
 dual 344
 Dualraum 341
 dynamisches System 36ff

Ebene, invariable 313f
 Eichinvarianz 91
 Einfangbahn 54
 Einstein Albert iv, v, l
 Ekliptik 319
 Energie 25f
 - eines Lagrangeschen Systems 91
 - ellipsoid 313ff
 - , gesamte 26
 - , innere 25f
 - , kinetische 25
 - , potentielle 25
 - -satz 24, 91, 100, 219f
 entartete Systeme 296ff
 Entartungsgrad 296
 epizykloidische Bewegung 315
 Ergodensatz, Birkhoffscher 151
 - , Neumannscher 148
 - , statistischer 150
 ergodisch 150, 262
 ergodischer Fluss 152
 erzeugende Funktionen von kanonischen Transformationen 210ff
 Euklidische Bewegungsgruppe 5f
 Euklidischer Raum 5
 - Vektorraum 5
 Euklidisches Koordinatensystem 5
 Euler Ableitung 87
 -, Kovarianz der 92
 Eulersche Gleichgewichtslagen 188
 - Gleichungen für den starren Körper 308f
 - Winkel 319ff
 exakt 345, 350
 Exponentialabbildung 364
 - Darstellung 364ff
 Exzentrizität 15, 69, 382

Figurenachse 310
 Fixpunkt, hyperbolischer 180
 Flächensatz she. Keplersche Gesetze
 Fluchtbahn 54
 Flussäquivalenz 165f
 Foucaultsches Pendel 82
 1-Form she Differentialform, lineare

Ergodensatz 97

Galilei Gruppe 11, 30ff, 219ff, 236ff
 - - , orthochrone 11
 - Raum-Zeit 32
 Galileisches Relativitätsprinzip 31
 - System 34
 - Transformation 9ff
 - - , spezielle 10
 geschlossen 345, 350
 Geschwindigkeit 12
 Glättungssatz 42
 Gleichgewichtspunkt 42
 - , hyperbolischer 165
 - , im restringierten 3-Körperproblem 184ff
 - , Linearisierung um 156
 Gradient 342
 Gravitation 19
 - -skonstante 19
 - -potential 22
 Grobman, Hartman, Satz von 166, 181
 Gruppe, Liesche 351ff
 - , lineare 351ff, 362
 - , orthogonale 361
 - , spezielle lineare 360ff
 - , spezielle unitäre 364
 - , topologische 351ff
 - , unitäre 363

 Hamilton Funktion 38, 122
 - -Jacobi Gleichung 242, 249ff, 269
 - - , verkürzte 245ff, 258
 Hamiltonsches System, lineares 160
 - Variationsprinzip 94ff
 - Vektorfeld 38, 132, 199ff
 Hauptachsentransformation 307
 Hauptträgheitsmoment 307
 Herpolhodie she. Spurkurve

 Implizites Funktionen-Theorem 343
 Impuls 23
 - satz 23, 98f, 219f
 Inertialsystem 7
 - zeitskala 7
 inkommensurabel 262
 Integrale Systeme 254ff
 Integrale der Bewegung 22ff, 48ff, 202, 217ff, 227ff
 Integralgesetze 13
 Integralkurve 37
 Involution, Funktionen in 254

 Jacobiidentität 198, 362
 - -integral 185
 - -koordinaten 223f
 - -matrix 342
 - , Satz von 254f
 Jost Res 121, 261

KAM-Theorem 284
 - -Theorie 283ff
 kanonische Diffeomorphismen 139, 196ff, 211ff
 - Differentialgleichungen 37f, 128f, 212
 - Koordinaten 1. Art 366
 - Systeme 50, 123
 - - , integrable 256f
 - Transformationen she. kanonische Diffeomorphismen
 kanonisch, verallgemeinert 202ff
 kanonoid 202ff
 kausale Struktur 8
 Keplerproblem 67ff
 Keplersches Gesetz, 1. und 2. 15
 - , 3. 18
 Kirkwoodsche Lücken 290
 Knotenlinie 319
 Körper, starrer she. Kreisel
 Kolmogorov 283ff
 konservatives System 26
 Kontinuitätsgleichung 139
 Koordinaten, einfache 291
 - , Jacobische she. Jacobi
 - , mehrfache 291
 - , relativ- 26, 91
 - , Schwerpunkts- 61, 223
 - -system 4, 5
 - - , körperfestes 304
 - , verallgemeinerte 112ff
 Kopernikus 8
 Kraft 14
 - , äussere 21
 - , generalisierte 113
 - , innere 21, 303
 - , treibende 26
 Kreisel 303ff, 375ff
 - , hängender 333
 - , kräftefreier 310ff
 - , kräftefreier, symmetrischer 310ff
 - , schiefer 333
 - , schlafender 336
 - , schwerer mit Fixpunkt 329ff
 - , stehender 333, 336
 - , symmetrischer 331 ff
 Kreisfrequenz 260
 Kriechbahn 60
 kritischer Punkt 56ff

 Lagrange-Funktion 87, 90f
 - -Multiplikatoren 108
 Lagrangesche Bewegungsgleichungen 1. Art 109
 - - 2. Art 87ff
 - Gleichgewichtspunkte 187
 - Systeme 89ff
 Legendre-Transformation 123ff
 Lenzscher Vektor 70
 Librationspunkte 334
 Liealgebra 199, 361ff
 - Antihomomorphismus 231, 326, 376
 - Homomorphismus 199f, 326, 367ff
 - Isomorphismus 367
 - , projektive Realisierung einer 229

Liealgebra, Unter- 202
 Liesche Gruppe she. Gruppe, Liesche
 Liesche Transformationsgruppe 369ff
 Liouvillesche Gleichung 197
 Liouville, Satz von 136
 Ljapunovfunktion 162
 - -stabilität 157, 180

 magnetischer Monopol 381
 Mannigfaltigkeit, differenzierbare im \mathbb{R}^n 352ff
 Masse, reduzierte 62
 - , träge 14, 20
 Mittelungsmethode 275
 - -satz 278
 Moser 283

 Neptun 283
 Newton 1, 2, 20
 - , Satz von 382
 nicht entartete Systeme 266
 Niveaukurve 51f
 Noether-Theorem 101
 Normalschwingung 169
 - , charakteristische Frequenz einer, 169
 - , charakteristische Richtung einer, 169
 Nutation 334, 340
 Nutationskegel 312

 Oscar II, König 273
 Oszillationen, kleine 167ff
 - , charakteristische she. Normalschwingung
 Oszillator, anharmonischer 266
 - , harmonischer 243f
 - mit periodisch variierender Frequenz 179

 Parametrisierung 355
 Pauli Wolfgang iv
 periodische Systeme, mehrfach 291
 perizykloide Bewegung 315
 Phasenbahn 38f, 52ff
 - -portrait 39
 - -raum 36
 - -, erweiterter 38, 204
 Physikalische Theorie iii
 Poincaré 269, 285
 - , Lemma von 350
 - -Abbildung 180
 Poincaréscher Wiederkehrsatz 145
 Poinot 313ff
 Poisson-Klammer 139, 196ff, 324, 328
 Polhodie she. Polkurve
 Polkegel 312
 Polkurve 314
 Potential 22
 Präzession 334, 340
 - , reguläre 311
 Prinzip actio = reactio 21
 Problem der kleinen Nenner 269

Flächende Systeme 104

Quadratur 254ff
 quasiperiodische Bewegung 152, 262

 Raum-Zeitmannigfaltigkeit 31
 - -Struktur 2ff
 Resonanz, parametrische 183
 Richtungsableitung 196
 Roche Limit 189
 Rosetten-Bahn 66
 Routh-Wert 189

 säkuläre Störungen 265
 Saturnringe 171ff
 Schraubenbewegung 304
 Schwarzschild'scher Einfangsatz 146
 Schwerpunkt 23
 - -satz 23f, 100f, 221ff
 singulärer Punkt she. Gleichgewichtspunkt
 Sommerfeld 86
 Spinsysteme, klassische 232ff
 Spurkegel 312
 Spurkurve 314
 Stabilität 157, 316ff
 - , asymptotische 157
 - der Saturnringe 171ff
 - , linearisierte 161
 - , starke 181
 Steiner, Satz von 305
 Störungstheorie 263ff
 - des Keplerproblems 298ff
 - für entartete Systeme 296ff
 - , zeitabhängige 253, 265ff
 - , zeitunabhängige 269ff
 Streubahn 54
 Strukturkonstanten 228
 Symmetrieeen Hamiltonscher Systeme 217ff
 Lagrangescher Systeme 96ff
 Symmetriegruppe 227
 Symmetrietransformation 96f
symplektische Gruppe 135
 Tangentialabbildung 359
 - -raum 358
 Torus 261
 - , nichtresonanter 282
 - , resonanter 282
 Traegheitsgesetz 7, 31
 - -tensor 305
 Transversalabbildung 286
 Twist-Abbildung 286
 - -theorem, Mosersches 289

 Umkehrpunkte 59, 260, 333

Variation der Konstanten 253, 265
Variationsprinzip she. Hamiltonsches Variationsprinzip
Vektorfeld 36, 359
- , autonome Erweiterung eines 39, 197
- , Hamiltonsches 38, 132, 200f
- , lineares 165
- , linksinvariantes 325, 376
- , lokaler Fluss eines 44ff
- , rechtsinvariantes 325, 376

wattlos 26
Weierstrass 254, 273
Weltformel iv
Hermann Weyl 2
- , Satz von 153
Winkelvariable 259ff, 338ff
Wirkungsvariable 259ff, 338ff

Zeipel, von 269
Zeitableitung, totale 88
Zeitevolution 35
Zentralkraft 21f
Zentrifugalbeschleunigung 77
- -kraft 78
- -potential 65
Zentrum 160, 181
zurückziehen 346
Zwangsbedingungen 102ff,
- , holonome 102f
- , nicht holonome 103ff
Zwangskraft 106
Zweikörperkraft 21, 60ff
- -problem 60ff
zyklische Variable